10 Pravolinijska površ

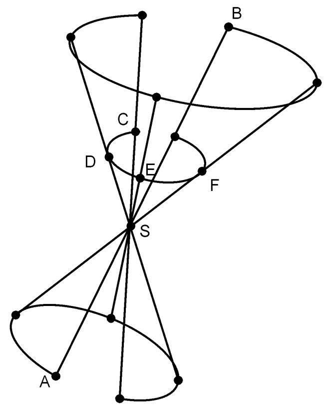
Pravolinijska površ (ili linijska površ) je površ formirana kretanjem prave (izvodnice) po nekoj krivoj (direktrisi). Linijska površ se može tretirati kao skup pravih koje zavise od jednog parametra. Linijske površi mogu biti razvojne ili kose. Razvojne se mogu "izvijanjem" razviti u ravan (npr. cilindar i konus). Tangentna ravan razvojne linijske površi u različitim tačkama jedne iste izvodnice je jedna ista ravan. Kao primjer kose linijske površi navedimo konoid.

Izvodnica (generatrisa) je prava koja pri svom kretanju siječe datu liniju (direktrisu pravolinijske površi) i formira (opisuje) pravolinijsku površ. Ako izvodnica krečući se po direktrisi ostaje cijelo vrijeme paralelna samoj sebi, ona opisuje cilindričnu površ. Ako izvodnica krečući se po direktrisi prolazi stalno kroz jednu istu tačku prostora, ona opisuje konusnu površ.

Direktrisa pravolinijske površi je linija po kojoj se kreće tačka prave koja (prava) opisuje ovu površ. Ako je direktrisa mnogougao, a izvodnica po kretanju ostaje paralelna samoj sebi, pravolinijska površ će biti prizmatična površ.

Cilindarska površ je površ obrazovana kretanjem prave p, koja se premješta paralelno samoj sebi i siječe neku zadanu ravnu krivu ω (direktrisa cilindrične površi). Pri tome se prava p naziva generatrisom cilindtične površi. Ako je direktrisa cilindarske površi elipsa, parabola ili hiperbola tada se cilindrična površ naziva redom eliptičkom, paraboličkom ili hiperboličkom. U analitičkoj geometriji cilindrična površ naziva se također cilindrom.

Konusna površ je površ koja nastaje kretanjem prave p tako što ona svo vrijeme prolazi kroz nepokretnu (datu) tačku S i siječe nepokretnu (datu) krivu CDE (vidi sliku).



Prava p naziva se izvodnica (generatrisa) konusne površi, tačka S vrh konusne površi, a kriva CDE je direktrisa konusne površi. Konusna površ ima dvije grane, jednu od njih opisuje poluprava SA, drugu poluprava SB.

Ako je direktrisa konusne površi krug, a tačka S se normalnom projekcijom na ravan ovog kruga projektuje u njen centar 0, konusna površ će biti obrtna površ koja se često naziva kružni konus ili jednostavno konus.

22. Oko paraboloida $x^2 + y^2 = 2z$ opisati konusnu površ sa tjemenom u tački $(0; 0; -2)$.

23. Odretiti jednačinu cilindrične površi čija je direktrisa $(x-a)^2 = -k(y-b)$; $z = c$ a generatrise su paralelne pravoj $x = mz$; $y = nz$.

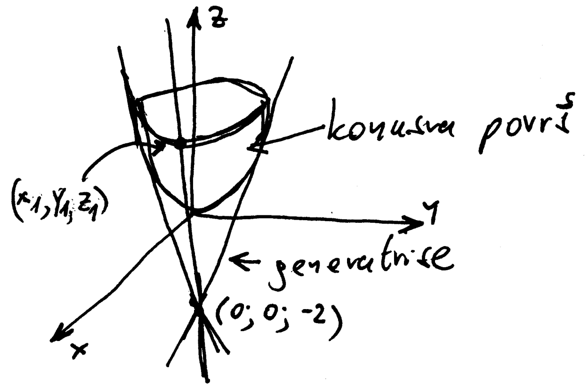
24. Naći jednačinu konusne površi čiji je vrh u tački $(0;0;-c)$ a direktrisa joj je lemniskata $z = 0$, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

25. Naći jednačinu cilindrične površi čije su genetatrise paralelne pravoj $x = y = z$ i tangiraju elipsoid $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.

(#) Oko paraboloida $x^2+y^2=2z$ opisati konusnu površ sa tjemenom u tački $(0;0;-2)$.

Rj.

Konusna površ je površ koja nastaje kretanjem prave koja cijelo vrijeme prolazi kroz neku datu fiksiranu tačku S i siječe nepokretnu datu krivu (direktrisu).



Tačka (x_1,y_1,z_1) paraboloida će biti i tačka konusa ako tangentna ravan paraboloida u toj tački sadrži i vrh konusa $(0;0;-2)$.

Kako tačka (x_1,y_1,z_1) pripada paraboloidu, imamo

$$x_1^2+y_1^2=2z_1 \quad \dots(1)$$

Vektor normale $\vec{n}$ na paraboloid je $\vec{n}=(2x,2y,-2)$ pa je jednačina tangentne ravni u tački $(x_1;y_1;z_1)$

$$2x_1(x-x_1)+2y_1(y-y_1)-2(z-z_1)=0 \quad /:2$$

$$x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)-(z-z_1)=0$$

$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$
jedn. ravni

Kako tačka $(0;0;-2)$ pripada ravni imamo

$$-x_1^2-y_1^2+z_1+2=0 \quad \dots(2)$$

Jednačina generatrise kroz tačke (x_1,y_1,z_1) i $(0,0,-2)$ je

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z+2}{z_1+2} \quad \left(=\frac{1}{t}\right)$$

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$
jedn. prave kroz dvije tačke

$x_1=xt \quad \dots(3)$

$y_1=yt \quad \dots(4)$

$z_1=(z+2)t-2 \quad \dots(5)$

Eliminišući parametre x_1,y_1,z_1 i t iz (1), (2), (3), (4) i (5) dobijamo jednačinu tražene površi.

$(1)+(2): \quad z_1 = 2$

$z = 2$ i $(5) \Rightarrow \quad t = \dfrac{4}{z+2} \quad \overset{(3)\ i\ (4)}{\Longrightarrow} \quad x_1 = \dfrac{4x}{z+2}, \quad y_1 = \dfrac{4y}{z+2}$

Ako uvrstimo gornje vrijednosti za x_1, y_1, z_1 u (1) dobivamo jednačinu konusne površi

$$\left(\frac{4x}{z+2}\right)^2 + \left(\frac{4y}{z+2}\right)^2 = 4$$

$$16x^2 + 16y^2 = 4(z+2)^2 \quad /:4$$

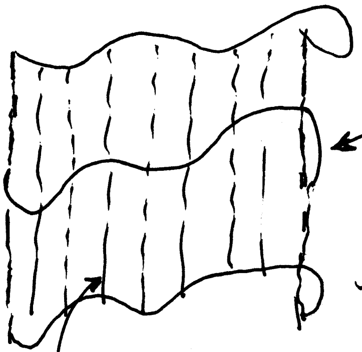
$$4(x^2+y^2) = (z+2)^2$$

tražena jednačina konusne površi

Odrediti jednačinu cilindrične površi čija je direktrisa $(x-a)^2 = -k^2(y-b)$; $z=c$ a generatrise su paralelne pravoj $x = mz$; $y = nz$;

R:

Ako intuitivno pokušamo zamisliti ovu površ, ona bi bila



neka kriva $\begin{cases}(x-a)^2 = -k^2(y-b \\ z=c\end{cases}$ je direktrisa

svako od ovih pravih je generatrisa i ona je paralelna pravoj $\begin{cases} x=mz \\ y=nz \end{cases}$

Uzmimo proizvoljnu tačku (x_1, y_1, z_1) na direktrisi. Tada je

$$(x_1-a)^2 = -k^2(y_1-b) \quad \dots(1)$$
$$z_1 = c \quad \dots(2)$$

Jednačina prave koja je paralelna generatrisi možemo napisati u obliku $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{1}$

($\vec{p} = (m, n, 1)$ vektor pravca)

Tada je jednačina generatrise kroz tačku (x_1, y_1, z_1)

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{1} \quad (=t)$$

(gdje je (x, y, z) tačka na cilindričnoj površi) tj.

$$x_1 = x - mt \quad \dots(3)$$
$$y_1 = y - nt \quad \dots(4)$$
$$z_1 = z - t \quad \dots(5)$$

Eliminišući parametre x_1, y_1, z_1 i t iz (1), (2), (3), (4) i (5) dobijamo jednačinu cilindrične površi.

Parametra z_1 se možemo "riješiti" ako (2) uvrstimo u (5):

$$c = z - t \implies t = z - c \quad \dots(6)$$

Parametra t se možemo "riješiti" ako (6) uvrstimo u (3) i (4)

$$x_1 = x - m(z-c) \quad \dots(7)$$
$$y_1 = y - n(z-c) \quad \dots(8)$$

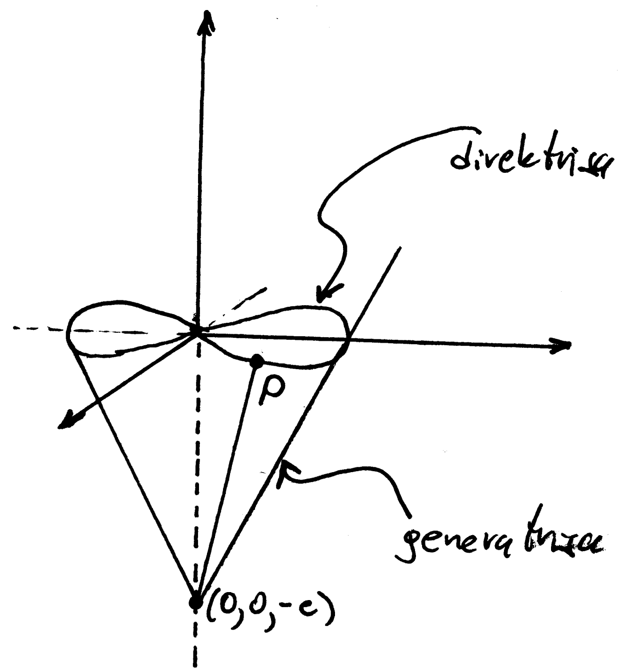
Na kraju ako (7) i (8) uvrstimo u (1) dobićemo traženu jednačinu cilindrične površi

$$[x-a-m(z-c)]^2 + k^2[y-b-n(z-c)] = 0.$$

(#) Naći jednačinu konusne površi čiji je vrh u tački $(0;0;-c)$ a direktrisa joj je lemniskata
$z=0$; $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

Rj:

Konusna površ je površ koja nastaje kretanjem prave p tako što ona svo vrijeme prolazi kroz nepokretnu (datu) tačku S i siječe nepokretnu (datu) krivu c. Prava p naziva se izvodnica (generatrisa) konusne površi, tačka S je vrh konusne površi a kriva c je direktrisa konusne površi.



Neka je $P(p_1,p_2,p_3)$ proizvoljna tačka na direktrisi. Tada je

$$(p_1^2+p_2^2)=a^2(p_1^2-p_2^2) \quad \dots(1)$$

i

$$p_3=0 \quad \dots(2)$$

Jednačina generatrise koja spaja $(0,0,-c)$ sa P je

$$\frac{x}{p_1}=\frac{y}{p_2}=\frac{z+c}{p_3+c} \quad \left(=\frac{1}{t}\right) \text{ tj.}$$

$$p_1=xt \quad \dots(3)$$

$$p_2=yt \quad \dots(4)$$

$$p_3=(z+c)t-c \quad \dots(5)$$

Ako iz jednačina (1), (2), (3), (4) i (5) eliminišemo p_1, p_2, p_3 i t dobićemo traženu jednačinu konusne površi.

Iz (2) i (5) slijedi

$$t = \frac{c}{z+c}$$

te (3) i (4) postaju $p_1 = \dfrac{cx}{z+c}$ ... (6)

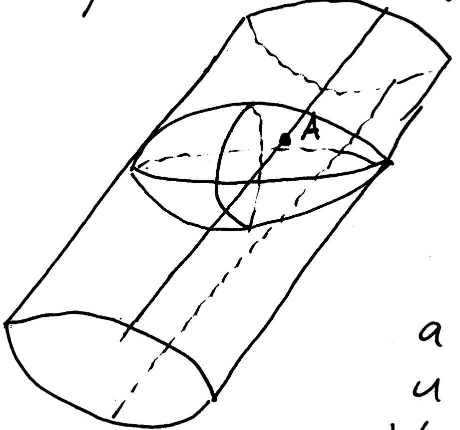
$$p_2 = \frac{cy}{z+c} \quad \ldots (7)$$

Ako (6) i (7) uvrstimo u (1) dobićemo traženu jednačinu konusne površi

$$c^2(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)(z+c)^2$$

(#) Naći jednačinu cilindrične površi čije su generatrise paralelne pravoj $x=y=z$ i tangiraju elipsoid $x^2+4y^2+9z^2=1$.

Rj. Pokušajmo zamisliti izgled tražene cilindrične površi.



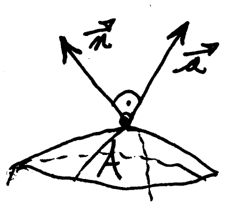
Ako je tačka $A(x_1,y_1,z_1)$ istovremeno na elipsi i na cilindru onda je sa jedne strane

$$x_1^2+4y_1^2+9z_1^2=1 \quad \ldots (1)$$

a sa druge strane je vektor $\vec{a}=(1,1,1)$ u tangentnoj ravni elipsoida u tački A (vektor $\vec{a}$ je paralelan sa vektorom pravca date prave $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$).

Vektor normale tangentne ravni je $\vec{n}=(x_1, 4y_1, 9z_1)$

$\left(F(x,y,z)=x^2+4y^2+9z^2-1,\ \frac{\partial F}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial F}{\partial y}=8y,\ \frac{\partial F}{\partial z}=18z\right)$



Iz uslova normalnosti $\vec{a}$ i $\vec{n}$ izlazi da je

$$x_1+4y_1+9z_1=0. \quad \ldots (2)$$

Jednačina generatrise kroz tačku A je

$$\frac{x-x_1}{1}=\frac{y-y_1}{1}=\frac{z-z_1}{1} \quad (=t) \quad \text{tj.}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x-t \\ y_1 &= y-t \\ z_1 &= z-t \end{aligned} \quad \ldots (3)$$

gdje je $B(x,y,z)$ tačka na cilindru.

Eliminišući x_1, y_1, z_1 i t iz (1), (2) i (3) dobijamo jednačinu cilindrične površi.

Ako (3) uvrstimo u (2) dobićemo t izraženo preko x, y i z:

$$(\ -t)+4(y-t)+9(z-t)=0$$

$$-14t+x+4y+9z=0 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{1}{14}(x+4y+9z).$$

Ako ovako dobijeno t vratimo u (3) dobićemo

$$x_1 = \frac{1}{14}(13x - 4y - 9z)$$

$$y_1 = \frac{1}{14}(-x + 10y - 9z)$$

$$z_1 = \frac{1}{14}(-x - 4y + 5z)$$

Novodobijene vrijednosti uvrstimo u (1):

$$(13x - 4y - 9z)^2 + 4(-x + 10y - 9z)^2 + 9(-x - 4y + 5z)^2 = 14^2$$

$$13^2x^2 + 16y^2 + 81z^2 - 2\cdot 13\cdot 4xy - 2\cdot 13\cdot 9xz + 2\cdot 4\cdot 9yz$$
$$+ 4(x^2 + 100y^2 + 81z^2 - 20xy + 18xz - 18yz)$$
$$+ 9(x^2 + 16y^2 + 25z^2 + 8xy - 10xz - 40yz) = 14^2$$

$$182x^2 + 560y^2 + 630z^2 - 112xy - 252xz - 1008yz = 14^2 \quad /:14$$

$$13x^2 + 40y^2 + 45z^2 - 8xy - 18xz - 72yz - 14 = 0.$$

tražena jednačina cilindrične površi